

Hausarbeit zur Vorlesung Kirby-Kalkül

Heegaard- und Henkel-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

Konstantin Müller

12. Juli 2018

Mathematisches Institut
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Universität zu Köln

Betreuung: Dr. Marc Kegel

Zusammenfassung

Wir diskutieren Heegaard-Zerlegungen von zusammenhängenden, geschlossenen, orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand und beweisen deren Existenz. Außerdem betrachten wir Henkelzerlegungen von geschlossenen, orientierbaren n -Mannigfaltigkeiten mit nicht-leerem Rand und beweisen, dass diese immer eine Henkelzerlegung ohne n -Henkel besitzen.

Inhaltsverzeichnis

1	Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand	2
1.1	Heegaard-Zerlegungen	2
1.2	Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand	2
2	Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand	7
2.1	Henkelzerlegungen	7
2.2	Henkelzerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand	8

Einleitung

In dieser Arbeit diskutieren wir zwei Darstellungsformen von zusammenhängenden, geschlossenen, orientierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand. Zuerst betrachten wir 3-Mannigfaltigkeiten und geben die verallgemeinerte Definition einer Heegaard-Zerlegung, einer Zerlegung der Mannigfaltigkeit in zwei gleiche Teile. Auf diese Weise lässt sich jede derartige 3-Mannigfaltigkeit als ein 2-dimensionales Diagramm, das sogenannte Heegaard-Diagramm, kodieren. Aussagen über 3-Mannigfaltigkeiten können so auf Aussagen über 2-dimensionale Diagramme zurückgeführt werden. Anders als in der üblichen Definition lassen wir hier auch Rand zu. Im zweiten Kapitel erklären wir, wie man für eine n -Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand eine Henkelzerlegung ohne n -Henkel erhält. Eine Henkelzerlegung ist bereits eine verhältnismäßig reduzierte Darstellung, die wir mit diesem Ergebnis noch weiter reduzieren.

Wir setzen für das Lesen dieser Arbeit grundlegende Kenntnisse der Geometrischen Topologie voraus, insbesondere Vertrautheit im Umgang mit Heegaard- und Henkel-Zerlegungen.

Für Abschnitt 1 über Heegaard-Zerlegungen orientieren wir uns eng an den Darstellungen von V. V. Prassolov und A. B. Sossinsky [9]. Abschnitt 2 über Henkelzerlegungen folgt im Groben den Darstellungen von R. E. Gompf und A. I. Stipsicz [4].

1 Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

1.1 Heegaard-Zerlegungen

Eine *Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht g* einer zusammenhängenden, geschlossenen, orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit M ist eine Darstellung von M als zwei disjunkte Kopien H_1, H_2 des Standardhenkelkörper¹ $\natural_g(S^1 \times D^2)$ vom Geschlecht g , verklebt mittels eines orientierungsumkehrenden Homöomorphismus $f : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$. Da Randpunkte von H_1, H_2 durch Verkleben zu inneren Punkten von M werden, beschreiben Heegaard-Zerlegungen zusammenhängende, geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten. Aus der Triangulierbarkeit solcher Mannigfaltigkeiten [7], folgt die Existenz einer Heegaard-Zerlegung.

1.2 Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

Seien nun G und H zwei Standardhenkelkörper (nicht notwendigerweise vom selben Geschlecht), jeweils eingebettet im \mathbb{R}^3 . Wir schneiden H symmetrisch in zwei Hälften H_1 und H_2 und richten die Einbettung so ein, dass \mathring{H}_1 in G und \mathring{H}_2 außerhalb von G liegt:

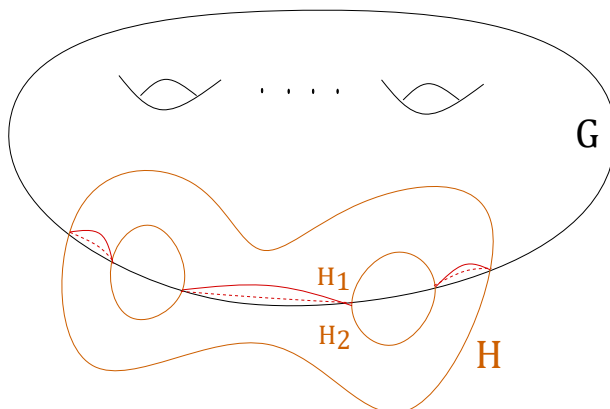


Abbildung 1: Lage von H_1, H_2 in Beziehung zu G

Es sei im Weiteren $G_\partial := \overline{G - H_1}$ der Teil von G , der nicht in H_1 liegt und $F := \overline{\partial G - \partial H_1}$ der Teil des Randes von G , der nicht in H_1 liegt. Beobachte, dass ∂F die disjunkte Vereinigung der in Abbildung 1 rot gezeichneten 1-Sphären ist.

¹Die g -fache randverbundene Summe $(\natural)_g$ ist analog zur verbundenen Summe definiert, die (für zwei Mannigfaltigkeiten) wie folgt konstruiert wird: Schneide jeweils D^n aus den Mannigfaltigkeiten und verklebe entlang eines orientierungsumkehrenden Homöomorphismus der Ränder der Scheiben. Dies ist unabhängig von der Wahl der Scheiben und des Homöomorphismus nach dem Scheibensatz von Palais [8]. Für die g -fache verbundene Summe einer Mannigfaltigkeit, bilde ausgehend von der Mannigfaltigkeit iterativ verbundene Summen mit jeweils einer neuen Kopie der Mannigfaltigkeit. Bei der randverbundenen Summe schneiden wir jeweils D^{n-1} aus den Rändern (anstelle D^n aus der Mannigfaltigkeit).

1 Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

Satz 1.1. *Wenn G und H die Geschlechter g und h besitzen, so ist G_∂ ein Standardhenkelkörper vom Geschlecht $g + h$.*

Beweis. Wir fassen das Herausschneiden von H_1 als h -faches Herausschneiden von $D^1 \times D^2$ auf. Wir wollen das Herausschneiden der ersten Kopie als Herausschneiden eines 1- und eines dazu aufhebenden 2-Henkels verstehen und anschließend den 2-Henkel wieder angemessen einkleben (vgl. Henkelaufhebung, Abschnitt 2.1 auf Seite 7).

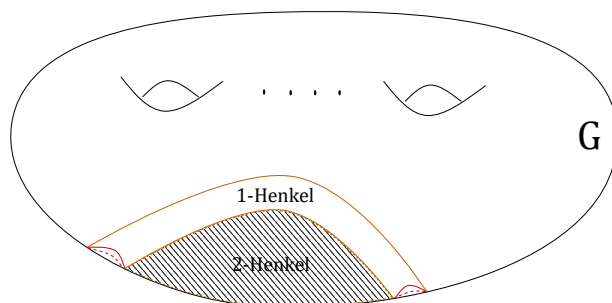


Abbildung 2: Henkelaufhebung in G

Erhalte nach Herausschneiden der sich aufhebenden Henkel und Abschließen also wieder einen Standardhenkelkörper vom Geschlecht g . Erhalte G_∂ dann durch Wiedereinkleben des 2-Henkels ($D^2 \times D^1$) mittels eines Homöomorphismus $D^2 \times \partial D^1 \rightarrow \partial G$, s.d. eine orientierbare 3-Mannigfaltigkeit entsteht. Dies entspricht gerade dem Anheften eines 1-Henkels und liefert damit den Standardhenkelkörper vom Geschlecht $g + 1$. Iteriere das Verfahren für die folgenden $h - 1$ Schnitte. \square

Satz 1.1 garantiert uns, dass die Heegaard-Zerlegung eine Zerlegung in zwei gleiche Teile ist. Es seien $G_{\partial,1}$ und $G_{\partial,2}$ mit F_1 und F_2 jeweils konstruiert wie G_∂ bzw. F durch Herausschneiden eines 'halben' Standardhenkelkörpers vom gleichen Geschlecht. Verkleben von $G_{\partial,1}$ mit $G_{\partial,2}$ durch einen Homöomorphismus $F_1 \rightarrow F_2$ liefert eine zusammenhängende, kompakte, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M mit $\partial M = \partial H = \Sigma_h$. Diese Darstellung von M nennt man *Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht h der Mannigfaltigkeit M mit Rand*. Wie für 3-Mannigfaltigkeiten ohne Rand, möchten wir die Existenz einer Heegaard-Zerlegung garantieren.

Satz 1.2. *Jede zusammenhängende, kompakte, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M mit Rand besitzt eine Heegaard-Zerlegung.*

Beispiel 1.1 ($(S^1 \times D^2) \setminus B^3$). Betrachte G als Standardhenkelkörper vom Geschlecht 1, aus dem wir Hälften von zwei Standardhenkelkörpern, jeweils vom Geschlecht 0 bzw. 1, ausschneiden.

Beobachte, dass das Herausschneiden einer Hälfte eines Standardhenkelkörpers vom Geschlecht 0, also einer 3-Scheibe, in der resultierenden 3-Mannigfaltigkeit dem Herausschneiden eines (offenen) 3-Balles entspricht. Da verschiedene Einbettungen eines 3-Balles in eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit nach dem Scheibensatz

1 Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

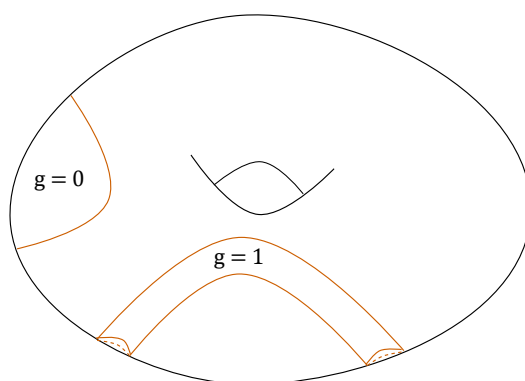


Abbildung 3: G_{∂}

von Palais [8] ambient isotop sind, können wir den Henkelkörper vom Geschlecht 0 für den Moment vergessen und am Ende einen 3-Ball heraus schneiden. Wir wählen den Verklebehomöomorphismus $F_1 \rightarrow F_2$ als Identität. Da $G \cup_{id} G = S^1 \times S^2$ [2] entsteht die resultierende Mannigfaltigkeit aus $S^1 \times S^2$ durch Herausschneiden eines unverknoteten Volltorus. Wir nutzen wieder $(S^1 \times D^2) \cup_{id} (S^1 \times D^2) = S^1 \times S^2$ um zu erkennen, dass die resultierende Mannigfaltigkeit homöomorph zu $(S^1 \times D^2)$ ist. Nun schneiden wir noch den 3-Ball heraus und bekommen schlussendlich $(S^1 \times D^2) \setminus B^3$.

Wir lassen auch zu, dass Heegaard-Zerlegungen unzusammenhängenden Rand liefern. Dazu erlauben wir aus G endlich viele Standardhenkelkörper H_i vom Geschlecht g_i , die in G getrennt liegen², 'halb' herauszuschneiden und $G_{\partial,1}$ mit $G_{\partial,2}$ mittels eines Homöomorphismus $F_1 \rightarrow F_2$ zu verkleben, der jeweils eine Bijektion der zu H_i gehörigen 1-Sphären in ∂F induziert. Für die so konstruierte 3-Mannigfaltigkeit M gilt dann $\partial M = \Sigma_{g_1} \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{g_n}$. Es folgt aus der Klassifikation von Flächen, dass wir auf diese Weise alle möglichen Ränder von zusammenhängenden, kompakten, orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten realisieren können.

Beispiel 1.2 (Außenraum des Kleeblattknotens). Betrachte die übliche Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1 der 3-Sphäre³

$$(S^1 \times D^2)_2 \cup_{\mu \rightarrow \lambda} (S^1 \times D^2)_1 \quad (1)$$

wobei die Verklebung mittels des Homöomorphismus

$$\begin{aligned} (S^1 \times S^1)_1 &\rightarrow (S^1 \times S^1)_2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

erfolgt. Wir schneiden nun jeweils einen 'halben' Volltorus aus $(S^1 \times D^2)_2$ und $(S^1 \times D^2)_1$ auf die folgende Art und Weise:

²Das heißt für jedes H_i existiert eine 3-Scheibe in G , die ∂G zusammenhängend schneidet, paarweise disjunkt zu den anderen 3-Scheiben ist und $H_i \cap G$ enthält.

³Siehe dazu z. B. [2].

1 Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

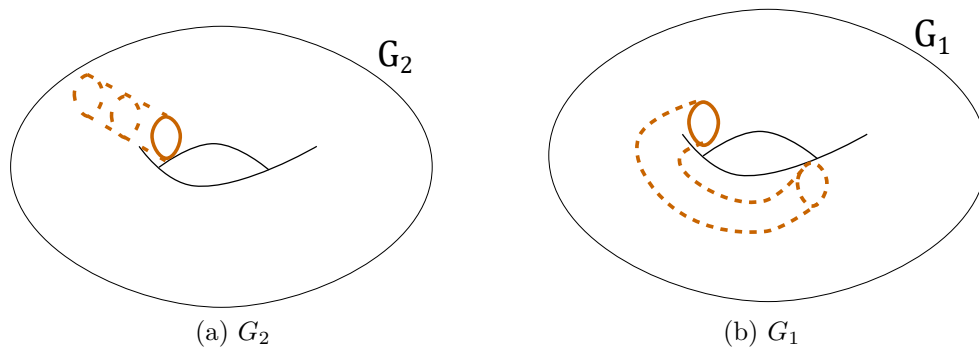


Abbildung 4: Konstruktion von G_1 und G_2

Nach Satz 1.1 erhalten wir zwei Henkelkörper G_1 und G_2 , jeweils vom Geschlecht 2. Durch die von $(\mu \mapsto \lambda)$ induzierte Verklebung erhält man den Außenraum des Unknotens:

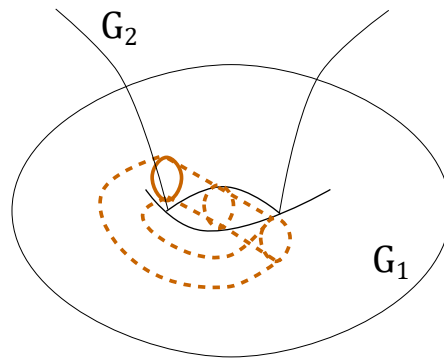


Abbildung 5: $G_2 \cup_{\mu \rightarrow \lambda} G_1$

Wir konstruieren eine Abbildung $f : \partial G_1 \rightarrow \partial G_1$, die auf dem Rand des herausgeschnittenen 'halben' Volltorus die Identität und außerhalb dieses Randes isotop zur Identität ist. Betrachte dazu G_1 und 'ziehe' die rechte Randscheibe des 'halben' Volltorus wie folgt:

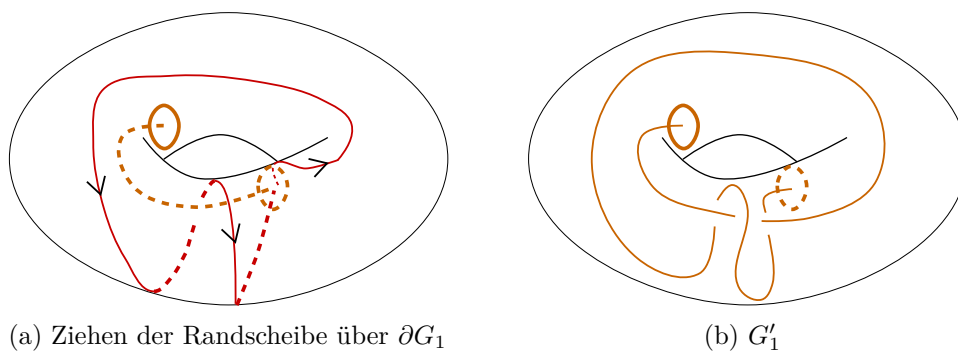


Abbildung 6

1 Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand

f erweitert zu einer Isotopie:

$$F : G_1 \rightarrow G'_1, \tag{2}$$

der den 'halben' Volltorus wie in Abbildung 6b verknötet. Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} G_2 & & U_{(\mu \mapsto \lambda) \circ f} & & G_1 \\ id \downarrow & & & & \downarrow F \\ G_2 & & U_{(\mu \mapsto \lambda)} & & G'_1 \end{array}$$

Demnach entspricht Verkleben mittels $((\mu \mapsto \lambda) \circ f)$ dem folgenden Bild:

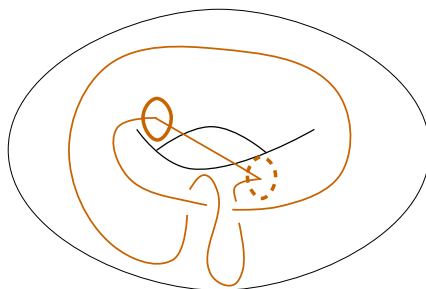


Abbildung 7: Kern des geschnittenen Volltorus in S^3

Dieser Knoten ist der rechtshändige Kleeblattknoten (siehe z. B. [2]). Somit ist eine Heegaard-Zerlegung vom Außenraum des rechtshändigen Kleeblattknotens gefunden. Der Außenraum eines Torusknotens lässt sich durch entsprechendes Ziehen in Abbildung 6 auf eben diese Art und Weise finden.

Beweis (Satz 1.2). Wir betrachten zuerst den Fall, dass ∂M zusammenhängend ist. Nach dem Klassifikationssatz für Flächen (siehe z. B. [3]) ist ∂M als zusammenhängende, kompakte, orientierbare, 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand dann homoömorph zu genau einer Fläche vom Geschlecht g , kurz Σ_g . Sei H ein Standardhenkelkörper vom Geschlecht g . Betrachte den Kern K von H als Kurve in H wie folgt:

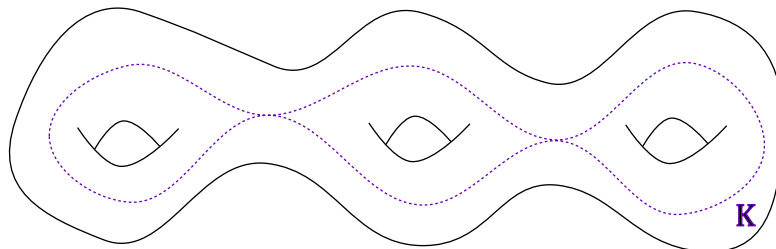


Abbildung 8: Der Kern von H

Nun verkleben wir M und H mittels der Identität $\partial M = \Sigma_h \rightarrow \Sigma_h = \partial N$. Die resultierende 3-Mannigfaltigkeit M_H ist dann geschlossen und orientierbar. Es existiert

2 Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand

eine Triangulierung T von M_H , s.d. K als Unterkomplex der Triangulierung auftritt: Wähle dazu eine Triangulierung von M und eine Triangulierung von H , in der K als Unterkomplex auftritt. Gehe über zur gemeinsamen Verfeinerung der Triangulierungen von $\partial M = \partial H$, die jeweils Verfeinerungen der Triangulierungen von M und H induzieren. Verkleben der Triangulierungen am Rand liefert eine Triangulierung von M_H in der K als Unterkomplex auftritt.

Wir nutzen jetzt das Verfahren aus dem Standardbeweis zur Existenz der Heegaard-Zerlegung [9]: Eine Umgebung $M_{H,1}$ des 1-Skeletts von T'' , der zweiten baryzentrischen Unterteilung von T , ist ein Henkelkörper für eine Heegaard-Zerlegung von M_H . Es gilt $K \subset M_{H,1}$. Isotopiere K derart, dass K symmetrisch zur Hälfte in $M_{H,1}$ und zur Hälfte im komplementären Henkelkörper $M_{H,2}$ liegt:

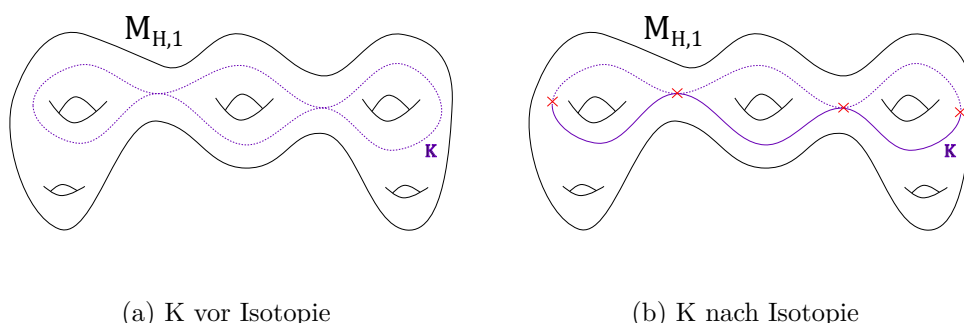


Abbildung 9: 'Herausdrücken' des Kerns

Eine angemessen gewählte Umgebung von K ist ein Standardhenkelkörper vom Geschlecht h , der symmetrisch zur Hälfte in $M_{H,1}$ und $M_{H,2}$ liegt. Diese Umgebung ist ambient isotop (in M_H) zu H , s.d. Herausschneiden dieser Umgebung wieder die 3-Mannigfaltigkeit M gibt. Dadurch ist eine Heegaard-Zerlegung gegeben.

Falls ∂M mehrere Komponenten hat, wähle H_1, \dots, H_n mit Kernen K_1, \dots, K_n für die n Komponenten. Da die Isotopie von K in M_H eine lokale Operation war, lassen sich die Isotopien der Kerne gleichzeitig durchführen und wir erhalten wie im Fall $n = 1$ eine Heegaard-Zerlegung der 3-Mannigfaltigkeit. \square

2 Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand

2.1 Henkelzerlegungen

Eine andere Art der Zerlegung von Mannigfaltigkeiten (ab jetzt beliebiger Dimension) ist die Henkelzerlegung. Da wir im ersten Kapitel in Dimension 3 gearbeitet haben, war die Angabe der Kategorie der Mannigfaltigkeiten nebensächlich (siehe dazu z. B. [2]). Nun arbeiten wir in der Diff-Kategorie, also mit glatten Mannigfaltigkeiten.

2 Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand

Ein n -dimensionaler k -Henkel h_k^n ist eine Kopie von $D^k \times D^{n-k}$. Das Anheften eines Henkels an eine Mannigfaltigkeit M ist das Verkleben mittels einer Einbettung $\partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$. Eine *Henkelzerlegung* einer n -Mannigfaltigkeit erhält man durch wiederholtes Anheften von n -dimensionalen Henkeln an die leere Menge. Dies liefert kanonisch eine differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeit [4].

Die *Anklebesphäre* A_k eines k -Henkels sei $S^{k-1} \times \{0\}$, die *Gürtelsphäre* G_k sei $\{0\} \times S^{n-k-1}$. Es lässt sich zeigen, dass, falls für einen k - und einen $(k+1)$ -Henkel, $A_k \cap G_{k+1}$ einpunktig ist, eine *Henkelaufhebung* durchführbar ist, d.h. Streichen der beiden Henkel aus der Henkelzerlegung erhält den Diffeomorphietyp der Mannigfaltigkeit [4].

2.2 Henkelzerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand

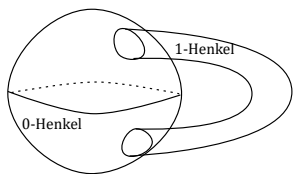
Ein wichtiges Ergebnis der Differentialtopologie, das Methoden der Morse-Theorie nutzt, ist die Existenz der Henkelzerlegung für kompakte Mannigfaltigkeiten [6]. Mit einfachen Methoden lässt sich dann für zusammenhängende, geschlossene Mannigfaltigkeiten eine Henkelzerlegung mit jeweils genau einem 0- und n -Henkel konstruieren. Wir wollen in diesem Kapitel eine ähnliche Aussage für Mannigfaltigkeiten mit Rand beweisen. Dazu nutzen wir, dass wir immer annehmen können, dass die Henkel mit aufsteigendem Index angeheftet werden [5].

Satz 2.1. *Jede zusammenhängende, kompakte n -Mannigfaltigkeit M mit nicht-leerem Rand besitzt eine Henkelzerlegung mit genau einem 0-Henkel und keinem n -Henkel.*

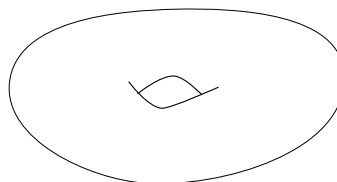
Beispiel 2.1. Wir betrachten den Standardhenkelkörper $\natural_g(S^1 \times D^2)$ mit Rand

$$\partial(\natural_g(S^1 \times D^2)) = \#_g(\partial(S^1 \times D^2)) = \#_g(S^1 \times S^1) = \Sigma_g.$$

Das Anheften eines 1-Henkels an einen 0-Henkel mittels eines orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus liefert wegen Äquivalenz der topologischen und differenzierbaren Kategorie in Dimension 3 immer den Volltorus, also den Standardhenkelkörper vom Geschlecht 1.



(a) Anheften eines 1-Henkels an einen 0-Henkel



(b) Volltorus

Genauso entspricht im Weiteren das Bilden der randverbundenen Summe mit einem Volltorus gerade dem Anheften eines 1-Henkels mittels eines orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus. Somit erhalten wir nach g Schritten den Standardhenkelkörper vom Geschlecht g als Henkelzerlegung mit genau einem 0-Henkel, g 1-Henkeln und keinem 2-Henkel.

2 Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand

Beweis (Satz 2.1). Da M kompakt ist, besitzt M eine Henkelzerlegung. Zuerst wollen wir zeigen, dass sich alle bis auf einen 0-Henkel durch Henkelaufhebung entfernen lassen. Betrachte dazu den *1-Henkelkörper* bestehend aus 0- und 1-Henkeln. Falls mehrere 0-Henkel existieren, impliziert der Zusammenhang der Mannigfaltigkeit, dass diese durch 1-Henkel verbunden sind, denn n -Henkel für $n \geq 2$ werden an einen zusammenhängenden Teil des Randes angeheftet. Wähle also einen 1-Henkel der zwei 0-Henkel verbindet. Die Anklebesphäre $S^0 \times \{0\}$ des 1-Henkels hat dann jeweils genau einen Punkt in den Rändern $\{0\} \times S^{n-1}$ der 0-Henkel, d.h. in den Gürtelsphären der 0-Henkel. Somit können wir Henkelaufhebung durchführen bis nur noch ein 0-Henkel vorhanden ist.

Nun wollen wir zeigen, dass sich auch alle bis auf einen n -Henkel durch Henkelaufhebung entfernen lassen.

Wir betrachten dafür zuerst das Verhalten der Komponenten von ∂M unter k -Henkel-Anheftung:

$$\partial(M \cup_{S^{k-1} \times D^{n-k}} (D^k \times D^{n-k})) = \partial M \setminus (S^{k-1} \times \overset{\circ}{D}^{n-k}) \cup_{S^{k-1} \times S^{n-k-1}} (D^k \times S^{n-k-1}) \quad (3)$$

- Der einzige 0-Henkel hat zusammenhängenden Rand.
- Für $k = 1$ besitzt $S^0 \times S^{n-2}$ zwei Komponenten, die durch den Henkelrand $D^1 \times D^{n-1}$ verbunden sind. Also bleibt der Rand in Gleichung (3) zusammenhängend.
- Da $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ zusammenhängend für $1 < k < n - 1$, so bleibt auch der Rand in Gleichung (3) zusammenhängend.
- Für $k = n - 1$ besitzt $S^{n-2} \times S^0$ zwei Komponenten, die nicht durch den Henkelrand $D^{n-1} \times S^0$ verbunden werden. Folglich entsteht eine neue Komponente des Randes g.d.w. die beiden Komponenten von $S^{n-2} \times S^0$ in $\partial M \setminus (S^{k-1} \times \overset{\circ}{D}^{n-k})$ verbunden sind. Falls beim Anheften eines $(n-1)$ -Henkels eine neue Randkomponente entsteht, tragen die beiden den Henkel berandenden Randkomponenten jeweils genau einen Punkt der Gürtelsphäre G_{n-1} .
- Anheften eines n -Henkel zerstört genau eine Komponente von ∂M : Ein n -Henkel wird mittels einer (glatten) Einbettung $S^{n-1} \rightarrow \partial M$ eingeklebt. Das Bild der Einbettung ist stetiges Bild einer kompakten Menge und somit im Hausdorff-Raum ∂M abgeschlossen. Zudem ist das Bild offen in ∂M , weil f als glatte Immersion nach dem Satz über die Umkehrabbildung lokal ein Diffeomorphismus ist. Folglich ist das Bild der Einbettung bereits eine Komponente von ∂M .

Angenommen nun, die Henkelzerlegung von M hat mindestens einen n -Henkel. Da $\partial M \neq \emptyset$ gibt es mindestens so viele $(n-1)$ -Henkel wie n -Henkel. Wähle beim Anheften des n -Henkels an eine Randkomponente einen $(n-1)$ -Henkel, s.d. (genau) ein Punkt von G_{n-1} in der Randkomponente liegt. Dann ist $A_n \cap G_{n-1}$ einpunktig und wir können eine Henkelaufhebung durchführen. Iteriere dieses Verfahren bis die Henkelzerlegung keine n -Henkel mehr hat. □

2 Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand

Zum Schluss wollen wir noch ein Beispiel einer Henkelzerlegung ohne n -Henkel für eine 3-Mannigfaltigkeit mit Rand geben, an dem wir das Zusammenhangs-Verhalten des Randes bei Anheften von Henkeln gut beobachten können.

Beispiel 2.2 ($(S^1 \times D^2) \setminus (S^1 \times D^2_{\frac{1}{2}})$). Wir geben eine Henkelzerlegung mit einem 0-Henkel, drei 1-, zwei 2-Henkeln und ohne 3-Henkel an:

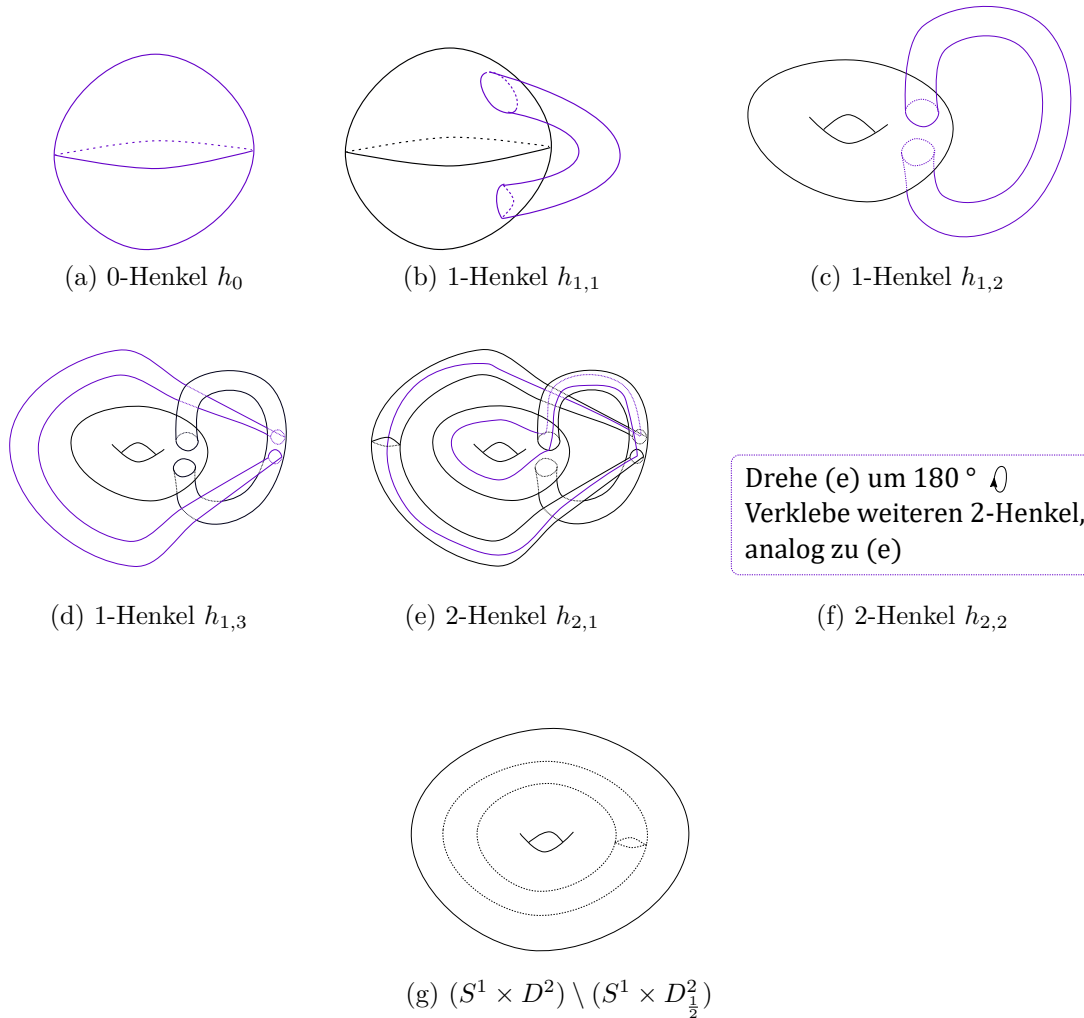
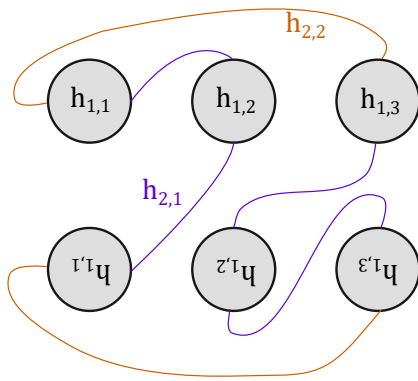


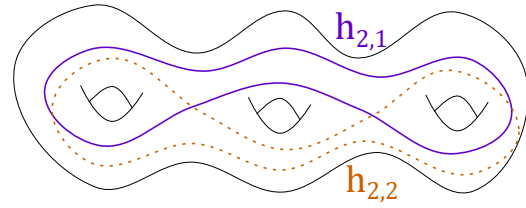
Abbildung 10: Henkel-Anheftung

Die in (e) gezeichnete lila-farbene Kurve ist die Anklebesphäre des 2-Henkels. Wir können beobachten, dass das Anheften von $h_{2,1}$ den Rand zusammenhängend lässt, während das Anheften von $h_{2,2}$ eine zusätzliche Komponente für den Rand schafft. Durch Verschieben der Ankleberegion von $h_{1,3}$ über $h_{1,2}$ auf $h_0 \cup h_{1,1}$ (in Abbildung 10e) kann man das planare Heegaard-Diagramm ablesen. Das Heegaard-Diagramm auf Σ_3 lässt sich direkt von Abbildung 10e ablesen.

2 Henkel-Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand



(a) Planares Heegaard-Diagramm



(b) Heegaard-Diagramm auf Σ_3

Abbildung 11: Heegaard-Diagramme

Literatur

- [1] R. H. CROWELL, R. H. FOX, *Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, New York (1963).
- [2] H. GEIGES, *Geometrische Topologie*, Manuskript der Vorlesung im WS 2017/18.
- [3] H. GEIGES, *Topologie*, Manuskript der Vorlesung im WS 2009/10.
- [4] R. E. GOMPF, A. I. STIPSICZ, *4-Manifolds and Kirby-Calculus*, Grad. Studies in Math. **20**, American Mathematical Society, Providence (1999).
- [5] M. KEGEL, *Kirby-Kalkül*, Persönliche Mitschrift der Vorlesung im SS 2018.
- [6] Y. MATSUMOTO, *An Introduction to Morse Theory*, Transl. Math. Monogr. **208**, American Mathematical Society, Providence (2001).
- [7] E. MOISE, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Grad. Text in Math. **47**, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [8] R. S. PALAIS, Extending diffeomorphisms, *Proc. Americ. Math. Soc.* **11**, American Mathematical Society (1900), 274–277.
- [9] V. V. PRASOLOV AND A. B. SOSSINSKY, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, Transl. Math. Monogr. **154**, American Mathematical Society, Providence (1997).

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte elektronische Fassung der eingereichten Druckfassung vollständig entspricht.

Köln, 12. Juli 2018

Konstantin Müller